La Geometría en el Arte: Los Vitrales de las Catedrales Góticas

Cecilia R. Crespo
Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V.González" y Universidad de Buenos Aires
Argentina
ccrespo@sinectis.com.ar
Pensamiento geométrico – Nivel medio

Resumen

Los conocimientos geométricos aparecen en las distintas culturas desde el principio, quizá unidos con los conceptos de belleza y armonía. En este trabajo se presenta un ejemplo de cómo este abordaje se puede llevar a cabo en la escuela en el nivel medio ligado con su aparición. Es posible encontrar múltiples ejemplos de distintos tipos de aplicaciones en los que los objetos geométricos y sus propiedades se hacen necesarios para estudiar las formas. Las catedrales góticas suministran un bello ejemplo en el que la geometría aparece no sólo en las formas de las construcciones arquitectónicas, sino en particular en las composiciones artísticas de las ventanas. Se propone realizar un análisis de cuáles fueron los conceptos geométricos que manejaron los constructores para lograr estas obras de arte.

Geometría y arte

La geometría, presente en las producciones humanas desde tiempos remotos, fue aplicada y estudiada por casi todos los pueblos. A las formas geométricas que denotan armonía se las cargó ya en civilizaciones antiguas de significados mágicos y misteriosos. No es raro encontrar en los pueblos de diversos orígenes, amuletos y manifestaciones artísticas cuyo estudio puede ser aprovechado en la escuela para acercar a los alumnos a una geometría humanizada, vista como una práctica social. La geometría es un área de la matemática que por décadas ha sido relegada por los docentes y no comprendida por los alumnos, siendo presentada a través de meras aplicaciones de operaciones numéricas y repetición de demostraciones.

La geometría no sólo puede estudiarse a partir de obras humanas, sino también por medio de la observación de la naturaleza, muchas veces copiada en las manifestaciones artísticas, a través de la visión humana del artista. El análisis de los elementos matemáticos presentes en una obra de arte, es una manera de acercarse a la concepción de la matemática como una manifestación cultural, como una práctica social. En el arte se pone de manifiesto no solo la destreza manual sino también la imaginación y el intelecto del artista.

La matemática como manifestación cultural en el aula

La capacidad crítica y la creatividad de los alumnos no suele aparecer en el aula si se presenta a la matemática sólo como una ciencia acabada. Es importante que esta ciencia sea reconocida en estado de continua evolución y desarrollo, en cuyo camino retoma, regenera y reelabora resultados e ideas anteriores, enriqueciéndolos a la luz de una visión distinta, como una ciencia que ofrece en cada momento histórico los conocimientos que posee a otras ciencias y áreas del quehacer humano.

Si se muestra a la matemática como un sistema de verdades sin hacer referencia a sus orígenes, a las ideas que fueron germen de sus conceptos y teorías, se pierde la concepción de ciencia como algo que surge de la necesidad de expresión de una manera de pensar, de una filosofía, de una manera de ver el mundo.

Toda manifestación cultural, y en particular aquellas que denotan conocimientos geométricos, es el reflejo de una situación social, pero por encima de todo, es reflejo de la forma de pensar de quienes la desarrollan. El hombre puede pasar mil veces al lado de la clave de un problema, pero no llegar a descubrirla, hasta que no sea capaz de madurar sus ideas, de llegar a "aprender" a descubrir esa clave. Y este proceso requiere de una manera de pensar y de ver al mundo. Aprender geometría relacionándola con el arte, permite a los alumnos no ser simples observadores pasivos, sino aprender a "mirar geométricamente" a su alrededor. No verán de esta manera a la matemática como una ciencia terminada, sino una ciencia viva en cada manifestación cultural. Relacionar la matemática y el arte da la posibilidad de pararse ante edificios y objetos que vemos cotidianamente de manera distinta: volver a mirarlos desde una óptica matemática puede resultar una experiencia enriquecedora para la curiosidad y la inteligencia, ya que permite desarrollar la capacidad para juzgar y valorar de manera objetiva la presencia material a través de sus aspectos funcionales y simbólicos en los que la matemática cobra indiscutible significatividad.

La geometría proporciona en el aula un rico contexto para el desarrollo del razonamiento matemático en el que pueden combinarse de manera natural formas de razonamiento tanto inductivas como deductivas, a través de la formulación de conjeturas y de la definición y clasificación de objetos geométricos. Los estudiantes de nivel medio deberían acceder al estudio de la geometría con un conocimiento informal sobre los elementos y figuras geométricas tanto bidimensionales como tridimensionales. Los especialistas en enseñanza de la geometría recomiendan actualmente (NCTM, 2000) que los alumnos investiguen relaciones dibujando, midiendo, visualizando, comparando, transformando y clasificando objetos geométricos.

Las catedrales góticas

Las catedrales góticas suministran un bello ejemplo en el que la geometría aparece no sólo en las formas de las construcciones, sino en particular en las composiciones artísticas de las ventanas, en las que nos centramos principalmente en este trabajo. En los vitrales, se combinan armónicamente formas poligonales realizadas a partir de circunferencias y arcos. El arte gótico corresponde a la Baja Edad Media. Con la ayuda tan solo de sencillos dibujos y plantillas, los maestros constructores dirigían la edificación de las grandes catedrales medievales. Los métodos de cálculos, aunque intuitivos y basados en relaciones matemáticas sencillas y en conocimientos prácticos eran celosamente conservados por los maestros y transmitidos de generación en generación. (La Nación, 1997).

Las catedrales son la expresión más alta del arte gótico y fueron construidas en las ciudades importantes de Europa en aquella época. La catedral gótica poseen ciertas características distintivas, entre ellas: su verticalidad, altura y esbeltez. La luminosidad de las construcciones góticas reemplazó la oscuridad que predominaba en las iglesias románicas. El arte románico refleja un mundo alejado del mundo humano, contrastando con el arte gótico que quiere unir el mundo espiritual con el mundo humano. Se caracteriza por la verticalidad y la luz, que es el reflejo de la divinidad.

Todos los elementos resaltan el carácter ascensional de la iglesia. Las torres-campanarios, generalmente se terminan en agujas que flanquean la fachada principal. La aguja corona el crucero en la parte exterior y el arco ojival se hace presente en las ventanas, los arcos interiores y los claustros. En el interior del templo, se utiliza la planta basilical o de cruz latina de 3 ó 5 naves, siendo la central mucho más elevada que las laterales. Las vidrieras cubren tanto los ventanales laterales y del crucero como el rosetón en el paño central de la fachada. Los grandes ventanales permiten la entrada de luz y el uso de las vidrieras permiten tamizar esa luz para crear una determinada atmósfera. Los pilares fasciculados o columnas se estiran hasta alcanzar una altura considerable.

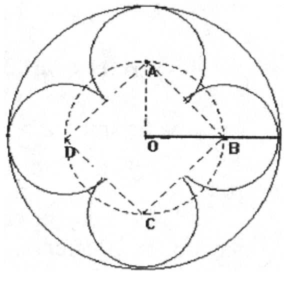
Vidrieras y rosetones

En los siglos XII y XIII, la luz era la fuente y la esencia de toda belleza visual. Según las ideas de la metafísica platónica en boga en la Edad Media la luz es el más noble de los fenómenos naturales, el menos material, el que se acerca más a la forma pura. La luz es, además, el principio creativo de todas las cosas y es especialmente activa en las esferas celestiales... Para los pensadores medievales la luz es el verdadero principio del orden y del valor.

Existen en las construcciones góticas dos formas principales de vidrieras: los rosetones y las lancetas acabadas en semi-círculo o en ojiva. Los rosetones son ventanas circulares caladas con adornos y tracerías que por su plenitud y su conclusión, unifican, sintetizan, recapitulan; mientras que las lancetas son más dinámicas, dramáticas, y en una cierta manera exteriorizan un mensaje. Estos mensajes, muchas veces corresponden a escenas bíblicas que eran de esta manera, transmitidos a quienes muchas veces no sabían leer; mediante la observación y concentración en estas escenas, la doctrina era aprendida por los fieles. Vemos claramente el carácter didáctico y comunicacional de estas manifestaciones artísticas.

Una formación típica presente en los rosetones góticos es el rosetón de cuatro pétalos.

Tratemos de describir la geometría presente en este diseño. Si se unen los centros de las circunferencias adyacentes con segmentos de recta, el resultado es un cuadrado. Es posible trazar una circunferencia con centro en el punto de intersección de las diagonales de ese cuadrado, que pase por los centro de las circunferencias que forman los pétalos del rosetón. La figura así obtenida sería el siguiente:



Es posible realizar los cálculos correspondientes a la construcción del trazado del rosetón anterior. Estos cálculos son bastante elementales y se encuentran, como veremos a continuación al alcance de alumnos de 13 o 15 años.

Queremos determinar la ubicación de los puntos A, B, C y D, siendo el dato inicial el radio OX = R de la circunferencia dentro de la cual se construirá el rosetón.

Las rectas OA y OB son perpendiculares, por contener las diagonales del cuadrado ABCD. Sabemos entonces que debe verificarse:

$$OA = OB = OC = OD = r$$

Además, por ser el ABCD un cuadrado, se tiene que:

$$2\, r^2 = AB^2$$

Pero como las circunferencias que forman los pétalos son tangentes dos a dos y los respectivos puntos de tangencia se encuentran en el punto medio de los lados del cuadrado que estamos utilizando:

$$AB = 2\,(R - r)$$

y entonces, realizando los cálculos correspondientes obtenemos:

$$r^2 - 4\,R\,r + 2\,R^2 = 0$$

Resolviendo esta ecuación en r:

$$r = (2 \pm \sqrt{2}\,)\,R$$

La raíz $r = (2 + \sqrt{2}\,)\,R$ queda descartada, pues el radio r debe ser menor que R.
Queda por lo tanto:

$$r = (2 - \sqrt{2}\,)\,R$$

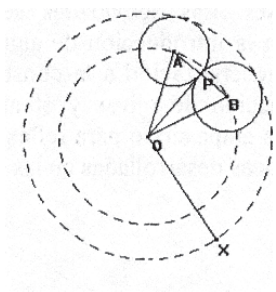
Obtenido este valor y con las consideraciones que hemos ido realizando, el dibujo del rosetón se realiza fácilmente. El trazado de un segmento de longitud $\sqrt{2}$, se realiza por medio de la aplicación del Teorema de Pitágoras, luego se obtiene $2 - \sqrt{2}$ como resta de segmentos y finalmente aplicando el Teorema de Thales para obtener el producto de este valor y R.

Una construcción que tiene gran sencillez por los cálculos necesarios es la del rosetón de seis pétalos. El caso de tres pétalos, aunque no tan simple como el de seis, involucra los elementos del triángulo equilátero y permite que se vea significatividad a los cálculos que se presentan de manera abstracta en tantos libros de texto. Ambos casos brindan la posibilidad de realizar planteos y cálculos que sin duda pueden realizar los alumnos de nivel medio como una actividad de validación de los conocimientos trabajados en la construcción anterior.

Generalizando a rosetones de distinta cantidad de pétalos

Es posible generalizar el resultado anterior y aplicarlo a la construcción de rosetones de distinta cantidad de pétalos mediante la utilización de propiedades provenientes de la geometría y la trigonometría. Estos rosetones son muy utilizados en diseños de los vitrales de las ventanas de las catedrales góticas. Por ejemplo, en la catedral de Amiens, se encuentran rosetones de tres, cuatro y ocho pétalos.

El diagrama general sería aproximadamente el siguiente:



Con el ángulo central AOB para el rosetón de n pétalos, será:

$$AOB = \frac{360º}{n}$$

por ser el ángulo central de un polígono de n lados.

En el triángulo AOB, que es isósceles, puede considerarse la bisectriz del ángulo AOB y en el triángulo rectángulo así determinado, se tiene:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha_n}{2}\right) = \frac{PB}{OB}$$

o sea:

$$r = \frac{R}{1 + \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha_n}{2}\right)}$$

Con el resultado que se acaba de hallar, es posible realizar los cálculos correspondientes a las ubicaciones de los pétalos de rosetones de distintas cantidades de pétalos (n) que se encuentran en las catedrales góticas. La tabla que de obtiene es la siguiente:

n	α_n	**r**	**r (aproximado)**
3	120º	$\frac{2}{2+\sqrt{3}}R$	0,54 R
4	90º	$\frac{2}{2+\sqrt{2}}R$	0,59 R
5	72º	$\frac{4}{4+\sqrt{10-2\sqrt{5}}}R$	0,63 R
6	60º	$\frac{2}{3}R$	0,67 R
8	45º	$\frac{2}{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}}R$	0,72 R
12	30º	$\frac{2}{2+\sqrt{2-\sqrt{3}}}R$	0,79 R

La construcción de estos rosetones requiere, como en el caso anterior, únicamente el uso de regla y compás mediante la aplicación de los teoremas de Pitágoras y Thales y ya que las operaciones requeridas son raíces cuadradas, sumas, restas, multiplicaciones y divisiones. Estas operaciones son las que corresponden a la obtención de segmentos construíbles con regla y compás.

Para cantidades de pétalos que superen los doce, los radios r, tal como puede observarse en las aproximaciones que figuran en la tabla anterior, se hacen cada vez más próximos al radio R de la circunferencia en la que se inscribe el rosetón por lo que su construcción se hace impracticable.

Una secuencia didáctica para trabajar con docentes y alumnos de nivel medio

Las ideas desarrolladas en este trabajo, fueron algunas de las presentadas durante un curso corto que se llevó a cabo durante el desarrollo de la Decimoctava Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (Relme 18), en Tuxtla Gutiérrez (Chiapas, México) en julio de 2004. Se interesaron en este curso más de treinta participantes provenientes de distintos países. Las actividades se dividieron en cinco etapas que corresponden respectivamente a la introducción de algunas construcciones preliminares, la construcción de rosetones, la generalización a la construcción de rosetones con cualquier número de pétalos, la construcción de ojivas y el análisis de las secuencias didácticas trabajadas en el curso. La última etapa sirvió para reflexionar acerca de las etapas anteriores y la aplicabilidad al aula de las ideas desarrolladas en las etapas anteriores.

Comentarios finales

El abordaje de los conceptos geométricos desde diferentes contextos, en los que se encuentra el arte y la historia permiten amenizar las clases y lograr mostrar a los alumnos una visión más amplia de la matemática, en la que se la ve no sólo desde el cálculo abstracto, sino como una verdadera manifestación cultural. En este artículo se ha intentado presentar un ejemplo de cómo este abordaje se puede llevar a cabo en la escuela. Es posible encontrar múltiples ejemplos de distintos tipos de aplicaciones en los que los conceptos geométricos y sus propiedades se hacen necesarios para estudiar las formas.

Quienes estamos en el ámbito de la enseñanza de la matemática, sabemos que es difícil a veces captar la atención de los alumnos. Programar situaciones donde los estudiantes aprendan a descubrir y aplicar los conocimientos matemáticos es un desafío, por la riqueza que pueden llegar a tener diferentes problemas y por la gran sorpresa de los alumnos en cuanto a que ponen de manifiesto sus propias capacidades para ir descubriendo relaciones y propiedades matemáticas en la observación de todo cuanto hay a su alrededor.

Referencias Bibliográficas

Castelnuovo, E. (1981). La *Geometría*. Barcelona, España: Ketres Editora.

Crespo, C. (1999). La historia de la geometría como elemento motivador y ejemplificador en la enseñanza. Documento presentado en la I Conferencia Argentina de Educación Matemática, Buenos Aires, Argentina.

Euclides (1991). *Elementos. Libros I-IV*. Madrid: Gredos.

González, P.M. (1991). Historia de la matemática: integración cultural de las matemáticas, génesis de los conceptos y orientación de su enseñanza. Enseñanza de las ciencias 9(3), 281-289.

Heilbron, J. L. (1998). *Geometry Civilized.* Oxford, E.U.A: Claredon Press.

Jantzen, H. (1970). *La arquitectura gótica.* Buenos Aires, Argentina: Nueva Visión.

La Nación. (1997). *Guía Visual de pintura y arquitectura*. Santiago de Chile.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). Principios y Estándares para la Educación Matemática. Sevilla, España: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Ramos, C.M. (2004, 6 de junio). Félix Bunge: El Señor de los vitrales. Revista de La Nación, pp. 67-70.